楕円曲線上のフックス型方程式の変形とパンルヴェVI型方程式 (Painleve系と超幾何系)

AUTHOR(S):
河井, 真吾

数理解析研究所講究録 1239 巻 2001 年 99-106

楕円曲線上のフックス型方程式の変形とパンルヴェVI型方程式

東京工業大学大学院理工学研究科　河井真吾 (Shingo Kawai)
(Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology)

1　はじめに

この小文では，楕円曲線上定義された2階のフックス型方程式のモノドロミー保存変形を記述する方程式系について紹介したあと，そのうち最も簡単なもの，具体的には楕円曲線の複素構造を記述する変数だけを独立変数とする常微分方程式が，パンルヴェVI型方程式のマニンによる表示（の特別な場合）にほかならないことを示す．これは，得られた方程式が新しいものではなかったという意味で残念な結果なのであるが，そのことの幾何学的な理由についての説明も試みる．

2　楕円曲線上のフックス型方程式の変形

M を種数1の閉リーマン面，$\mathbb{H}=\{\tau\in\mathbb{C};\,\mathrm{Im}\,\tau>0\}$ を上半平面としよう．適当な点 $\tau\in\mathbb{H}$ をとり $M=\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ と表せば，M 上の方程式は $\mathbb{C}$ 上の方程式であって係数が二重周期函数すなわち楕円函数であるものとして表現される．M 上のフックス型方程式で

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad &\frac{d^2w}{dz^2}=q(z)w,\\
&q(z)=L+\sum_{i=0}^{m}\Big[H_i\zeta(z-t_i,\tau)+\frac{1}{4}(\theta_i^2-1)\wp(z-t_i,\tau)\Big]\\
&\qquad\quad+\sum_{\alpha=0}^{m}\Big[-\mu_\alpha\zeta(z-\lambda_\alpha,\tau)+\frac{3}{4}\wp(z-\lambda_\alpha,\tau)\Big]
\end{aligned}
$$

という形のものを考えよう．ただし，楕円函数 $q(z)$ の留数の和に関する条件

$$
(2)\qquad \sum_{i=0}^{m}H_i-\sum_{\alpha=0}^{m}\mu_\alpha=0
$$

がみたされており，また点 $t_i,\lambda_\alpha\in\mathbb{C}$ は平行移動によって $t_0=0$ となるように正規化されているものとする．

方程式 (1) は，$2m+2$ 個の点 $[t_i], [\lambda_\alpha]$ $(i, \alpha = 0, \ldots, m)$ ($[z]$ は $z \in \mathbb{C}$ の代表する M 上の点を表す) をそれぞれ特性指数 $\frac{1}{2}(1 \pm \theta_i), \frac{1}{2}(1 \pm 2)$ の確定特異点とし，そのモノドロミー表現は

$$\rho : \pi_1(M \setminus \{[t_0], \ldots, [t_m], [\lambda_0], \ldots, [\lambda_m]\}) \to SL(2, \mathbb{C})$$

という形の準同型の共役類として与えられる．いまとくに，(i) 各 θ_i は非整数であり，(ii) 各 $[\lambda_\alpha]$ は見かけの特異点（すなわち非対数的な特異点）であると仮定することにしよう．すると，条件 (ii) から得られる $m+1$ 個の関係式と等式 (2) は

$$\begin{bmatrix} 1 & \zeta(\lambda_0 - t_0, \tau) & \ldots & \zeta(\lambda_0 - t_m, \tau) \\ 1 & \zeta(\lambda_1 - t_0, \tau) & \ldots & \zeta(\lambda_1 - t_m, \tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta(\lambda_m - t_0, \tau) & \ldots & \zeta(\lambda_m - t_m, \tau) \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ H_0 \\ \vdots \\ H_{m-1} \\ H_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_0 \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_m \\ \sum_{\alpha=0}^m \mu_\alpha \end{bmatrix},$$

$$\nu_\alpha = \mu_\alpha^2 + \sum_{\beta=0, \neq\alpha}^m \left[\mu_\beta \zeta(\lambda_\alpha - \lambda_\beta, \tau) - \frac{3}{4}\wp(\lambda_\alpha - \lambda_\beta, \tau)\right] - \sum_{i=0}^m \frac{1}{4}(\theta_i^2 - 1)\wp(\lambda_\alpha - t_i, \tau)$$

という形の 1 次方程式にまとめられるから（岡本 [7] を参照），その係数行列が正則であるという条件のもとで，方程式 (1) のパラメーターのうち L と H_i $(i = 0, \ldots, m)$ は（楕円函数を用いて具体的に表される）他のものの函数

$$\begin{cases} L = L(\tau, t, \lambda, \mu) \\ H_i = H_i(\tau, t, \lambda, \mu) \quad (i = 0, \ldots, m) \end{cases}$$

として表されることになり，したがってこの形の方程式は局所的に (τ, t, λ, μ) という $3m+3$ 個のパラメーターによってパラメトライズされることがわかる．ただし，$t = (t_1, \ldots, t_m)$, $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$, $\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_m)$ である．また，岩崎 [2] によれば，上記の正則性の条件は (τ, t, λ, μ) が

$$\sum_{\alpha=0}^m \lambda_\alpha - \sum_{i=0}^m t_i \not\equiv 0 \mod \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \tag{3}$$

をみたすことと同等であることが知られている．

さて，本稿における我々の興味の対象は，方程式 (1) の変形すなわちパラメータ (τ, t, λ, μ) の変分であって，(1) のモノドロミーの共役類を不変に保つようなもの—モノドロミー保存変形— である．[3] によればそのような変形はつぎのように記述される．

定理 1 方程式 (1) のモノドロミー保存変形は，局所的に独立変数 (τ, t)，従属変数 (λ, μ)，そしてハミルトニアン $H_i = H_i(\tau, t, \lambda, \mu)$, $K = K(\tau, t, \lambda, \mu)$ の完全積分可

能ハミルトン系

$$
(4)\qquad \begin{cases} d\lambda_\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H_i}{\partial \mu_\alpha} dt_i + \frac{\partial K}{\partial \mu_\alpha} d\tau \\ d\mu_\alpha = -\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_\alpha} dt_i - \frac{\partial K}{\partial \lambda_\alpha} d\tau \qquad (\alpha = 0, \ldots, m) \end{cases}
$$

によって記述される．ただし，ハミルトニアン $K = K(\tau, t, \lambda, \mu)$ は

$$
K = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \Big[L + \eta_1(\tau) \Big(\sum_{\alpha=0}^{m} \lambda_\alpha \mu_\alpha - \sum_{i=1}^{m} t_i H_i \Big) \Big]
$$

によって与えられ，$\eta_1(\tau)$ は $\eta_1(\tau) = \zeta(z+1, \tau) - \zeta(z, \tau)$ によって定まる τ の函数である．

この結果が得られたのは数年前のことなのだが，最近になって，得られた方程式系のさまざまな性質を調べることもやはり興味深く，是非試してみるべきことだという認識をもつようになった．パンルヴェ方程式やガルニエ系に関する先行する研究にならえば，具体的にはこれらの方程式系のパンルヴェ性，ベックルント変換による対称性，初期値空間の構造などを調べることが当面の課題としてあげられるであろう．

とくに，もっとも簡単な $m = 0$ の場合には，方程式系 (4) は上半平面内を動く変数 τ を独立変数とする**常微分方程式**になり，技術的にはパンルヴェ方程式と同様の解析が可能であると期待される．ここから，パンルヴェ方程式の楕円型版とでもよべるような新しい方程式が出てくれば面白いと思っていたのだが，残念ながら結論としてはそうはならず，得られた方程式はパンルヴェVI型方程式のマニン [6] による表示（の特別な場合）そのものになっていることがわかった．次節ではこのことを簡単に説明しよう．

3　特異点2個の場合

まず $m = 0$ の場合，方程式 (1) は

$$
(5)\qquad \frac{d^2 w}{dz^2} = q(z) w,
$$
$$
q(z) = L + H\zeta(z, \tau) + \frac{1}{4}(\theta^2 - 1)\wp(z, \tau) - \mu\zeta(z - \lambda, \tau) + \frac{3}{4}\wp(z - \lambda, \tau)
$$

という簡単な形になる．ただし $H - \mu = 0$ であり，添え字0は省略した．また条件 (ii) から

$$
(6)\qquad L = \mu^2 - \zeta(\lambda, \tau)\mu - \frac{1}{4}(\theta^2 - 1)\wp(\lambda, \tau)
$$

を得ることに注意する.（条件 (3) は単に $\lambda \not\equiv 0 \mod \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ を意味する.）したがってこの場合，方程式系 (4) を具体的に書き下すと

$$
(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{d\tau} = \dfrac{\partial K}{\partial \mu} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\Big[2\mu - \varphi(\lambda,\tau)\Big] \\ \dfrac{d\mu}{d\tau} = -\dfrac{\partial K}{\partial \lambda} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\Big[-\mu\varphi'(\lambda,\tau) + \dfrac{1}{4}(\theta^2-1)\varphi''(\lambda,\tau)\Big] \end{cases}
$$

という形になることがわかる．ただし，$\varphi(\lambda,\tau) = \zeta(\lambda,\tau) - \eta_1(\tau)\lambda$ であり，$'$ は λ に関する微分を表す.

そこで，(7) にある 2 つの方程式から μ を消去することを考えよう．それには，第 1 式を μ について解いたものを第 2 式に代入すればよい．計算の過程で，函数 $\varphi(\lambda,\tau)$ が方程式

$$
\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(\lambda,\tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\Big[\frac{1}{2}\varphi''(\lambda,\tau) + \varphi(\lambda,\tau)\varphi'(\lambda,\tau)\Big]
$$

をみたすことを用いる．これは $\varphi(\lambda,\tau)$ がテータ函数

$$
\theta_1(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\Big[\pi\sqrt{-1}\tau\Big(n+\frac{1}{2}\Big)^2 + 2\pi\sqrt{-1}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\Big(z+\frac{1}{2}\Big)\Big]
$$

によって $\varphi(\lambda,\tau) = \dfrac{\theta_1'(\lambda,\tau)}{\theta_1(\lambda,\tau)}$ と表されることから，熱方程式

$$
\theta_1''(z,\tau) = 4\pi\sqrt{-1}\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau}(z,\tau)
$$

を用いて直ちに示されるものである．結果をまとめると，次のようになる.

定理 2 方程式 (5) のモノドロミー保存変形は，常微分方程式

$$
(8) \qquad \frac{d^2\lambda}{d\tau^2} = -\frac{\theta^2}{8\pi^2}\wp'(\lambda,\tau)
$$

によって記述される．ただし，$\wp'(\lambda,\tau) = \dfrac{\partial \wp}{\partial \lambda}(\lambda,\tau)$ である.

マニン [6] によれば，方程式 (8) はパンルヴェVI 型方程式の**楕円型表示**のパラメータが特別な場合に対応することが知られている．これと同様に，マニンの表示を楕円曲線上のモノドロミー保存変形の視点から解釈する試みはすでにいくつかなされており，レヴィン-オルシャネットスキー [5], 高崎 [8] は，楕円型カロジェロ-モーザー系を非自励系として解釈し直すことによって，また筆者 [4] は，楕円曲線上の射影接続という観点から，それぞれ論じている.

定理 2 の主張について一つ不思議なのは，そもそもなぜ方程式 (5) のモノドロミー保存変形からパンルヴェVI 型方程式が現れるのかということである．よく知

られているように，パンルヴェVI型方程式自身はリーマン球面$\mathbb{P}^1$上のフックス型方程式の変形から得られるものであるから，上の主張は方程式(5)の変形が何らかの形で，$\mathbb{P}^1$上の方程式の変形に帰着されることを示唆していると考えられる．[4]では，楕円曲線の**対合写像**で**不変**な2階の方程式（射影接続）と，それを対合写像による商空間である$\mathbb{P}^1$上に落としたものとを対比させることによって，マニンの表示に対する楕円曲線上のモノドロミー保存変形の方程式としての解釈とその幾何学的説明を与えた．

ところが今回の方程式(5)は，$[0]$を確定特異点，$[\lambda]$を見かけの特異点とするものであり，たとえばこれら2点を入れ替える対合写像では不変ではないから，[4]で用いた議論はこのままでは適用できないようにみえる．それにもかかわらず，やはりパンルヴェVI型方程式が現れるのはなぜなのだろうか．次節ではこの点について一つの説明を試みることにしたい．

4　なぜパンルヴェVI型方程式なのか

方程式(5)の変形からパンルヴェVI型方程式が現れることの幾何学的理解が本節の目標である．いま楕円曲線$M = \mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$上に，(5)とは別にもう一つのフックス型方程式

$$(9)\qquad \frac{d^2w}{dz^2} = p(z)w,$$
$$p(z) = N + H\zeta(z,\tau) + \frac{3}{4}\wp(z,\tau) - \mu\zeta(z-\lambda,\tau) + \frac{3}{4}\wp(z-\lambda,\tau)$$
$$+\sum_{j=0}^{3}\frac{1}{4}\Big(\Big(\frac{\theta}{2}\Big)^2 - 1\Big)\wp\Big(z - \Big(\frac{\lambda}{2}+\omega_j(\tau)\Big),\tau\Big)$$

を考えよう．ただし(5)と同様に$H-\mu=0$であり，また

$$\omega_0(\tau)=0,\quad \omega_1(\tau)=\frac{1}{2},\quad \omega_2(\tau)=\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},\quad \omega_3(\tau)=\frac{\tau}{2}$$

である．

方程式(9)は，方程式(5)の$[0]$における特性指数を$[\lambda]$におけるものと同じになるように変更し，そのかわりに$[0]$と$[\lambda]$を入れ替えるMの対合写像ιの4個の不動点$[\lambda/2+\omega_j(\tau)]$ $(j=0,\dots,3)$において，特性指数$\frac{1}{2}(1\pm\frac{\theta}{2})$の確定特異点をもつようにしたものである．容易にわかるように，(9)の右辺の係数$p(z)$は対合写像ιで不変になっている．さらにここで，$[0],[\lambda]$はともに見かけの特異点であると仮定しよう．そのための条件は，上に注意したことからもわかるように，$[0]$に対しても$[\lambda]$に対しても同等の式となり，明示的には

$$(10)\qquad N = \mu^2 - \zeta(\lambda,\tau)\mu - \frac{3}{4}\wp(\lambda,\tau) - \sum_{j=0}^{3}\frac{1}{4}\Big(\Big(\frac{\theta}{2}\Big)^2 - 1\Big)\wp\Big(\frac{\lambda}{2}+\omega_j(\tau),\tau\Big)$$

と表される.

そこでいま，方程式 (9) のモノドロミー保存変形を考えよう．これは本質的に [4] で考察した変形の特別な場合であり，(9) の右辺の係数 $p(z)$ の対合写像 ι による不変性から，ι による M の商空間である $\mathbb{P}^1$ 上の方程式の変形を記述することになるはずのものである．具体的には，次のような結果が得られる（[4] を参照されたい）．

定理 3　方程式 (9) のモノドロミー保存変形は，局所的に独立変数 τ，従属変数 (λ,μ)，そしてハミルトニアン $J=J(\tau,\lambda,\mu)$ の完全積分可能ハミルトン系

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} &= \frac{\partial J}{\partial \mu} \\ \frac{d\mu}{d\tau} &= -\frac{\partial J}{\partial \lambda} \end{aligned}\right. \tag{11}$$

によって記述される．ただし，ハミルトニアン $J=J(\tau,\lambda,\mu)$ は

$$J=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}(N+\eta_1(\tau)\lambda\mu)$$

によって与えられる．

さてここで，上のハミルトン系を方程式 (5) のモノドロミー保存変形を記述するハミルトン系 (7) と比較してみよう．独立変数 τ，従属変数 (λ,μ) についてはもちろん同じであるが，さらにハミルトニアンについても，$\wp$ 函数に関する等式

$$\wp(2\lambda,\tau)=\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3}\wp(\lambda+\omega_j(\tau),\tau)$$

に注意すると，(6), (10) から容易に $L=N$ したがって $K=J$ となることがわかる．すなわち，ハミルトン系 (7) と (11) は実はまったく同一の方程式系なのである．このことから，方程式系 (7) が方程式系 (11) と同様に $\mathbb{P}^1$ 上の方程式の変形，より具体的には方程式 (9) の特異点の性質と個数から，パンルヴェVI 型方程式を記述することがわかり，定理 2 ではそのことをマニンの表示を通じて確かめたのであった．

5　今後の課題

本稿では，楕円曲線上の 2 階のフックス型方程式 (1) のモノドロミー保存変形を記述するハミルトン系 (4) について紹介したあと，そのもっとも簡単な $m=0$ の場合にあたる常微分方程式が実は新しいものではなく，パンルヴェVI 型方程式のマニンによる表示（の特別な場合）にほかならないことをみた．すると次に問題になるのは，一般に $m>0$ の場合はどうなのか，たとえばそれらは単にガルニエ系

の別表示になっているといったことはないのか，ということであろう．これについては，いまのところハミルトン系 (4) は一般にはガルニエ系に帰着されることはないであろうと考えているが，きちんとした証明はまだもっていない．また先にも述べたように，より一般に方程式系 (4) のさまざまな性質，たとえばパンルヴェ性，ベックルント変換による対称性，初期値空間の構造などを調べることも今後の課題としたい．

さらに，本稿で考察した特異点の数からみても単純な線型方程式 (5) のモノドロミー保存変形という視点から，パンルヴェVI型方程式 (8) に関する新たな知見が得られることがあれば，それはそれで興味深いと思われる．たとえば方程式 (8) の解については，次のようなことが知られており，方程式 (5) との関係においてこれらをながめてみることも今後の課題である．

- $\theta = 0$ のとき，ピカールの解とよばれる 2 次元の古典解をもつ．
- $\theta = 1$ のとき，1 次元の古典解をもち，また $\mathbb{P}^2$ の量子コホモロジーのポテンシャル（マニン [6] を参照）を解としてもつ．
- $\theta = 2$ のとき，解はすべて古典的であり，とくにヒッチン [1] による代数解をもつ．

参考文献

[1] N. J. Hitchin, *Twistor spaces, Einstein metrics and isomonodromic deformations*, J. Differ. Geom. **42** (1995), 30–112.

[2] K. Iwasaki, *Moduli and deformation for Fuchsian projective connections on a Riemann surface*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **38** (1991), 431–531.

[3] S. Kawai, *Isomonodromic deformation of Fuchsian-type projective connections on elliptic curves*, 数理解析研究所講究録 **1022** (1997), 53–57.

[4] ———, Painlevé VI 型方程式の Manin による表示について, in Perspective of Painlevé Equations, Rokko Lectures in Mathematics **7** (2000), 79–90.

[5] A. M. Levin and M. A. Olshanetsky, *Hierarchies of isomonodromic deformations and Hitchin systems*, in Moscow Seminar in Mathematical Physics, 223–262, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 191, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[6] Yu. I. Manin, *Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of* $\mathbb{P}^2$, in Geometry of differential equations, 131–151, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 186, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, `alg-geom/9605010`.

[7] K. Okamoto, *On the holonomic deformation of linear ordinary differential equations on an elliptic curve*, Kyushu J. Math. **49** (1995), 281–308.

[8] K. Takasaki, *Elliptic Calogero-Moser systems and isomonodromic deformations*, J. Math. Phys. **40** (1999), 5787–5821, `math.QA/9905101`.